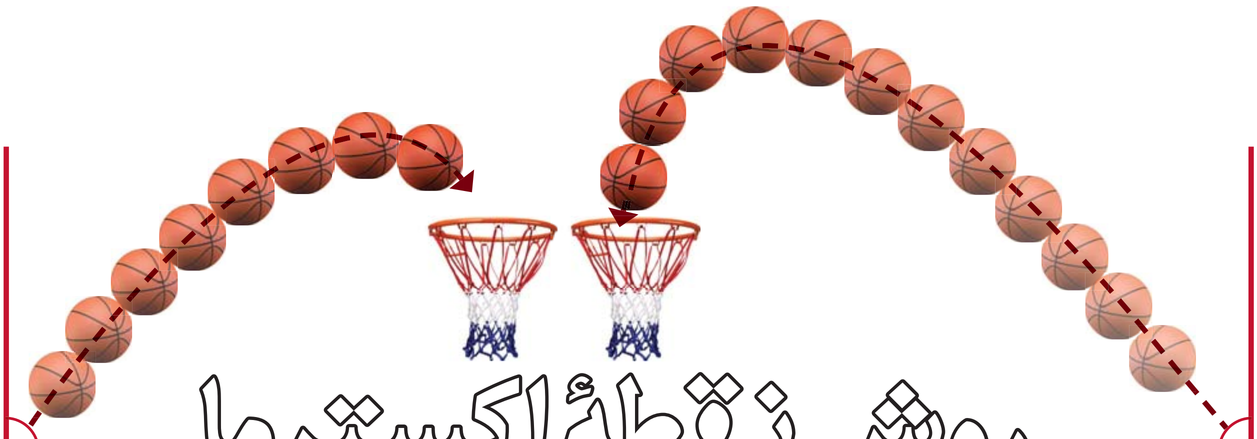
احسان یارمحمّدی



روش نقطهٔ اِکسترِما

(روش ابتکاری حل معادلهٔ درجهٔ دوم)

هنگامی که بحث در مورد روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم به میان می‌آید، رابطهٔ Δ به‌عنوان یک روش کلی و عمومی‌تر برای حل این دسته از معادله‌ها مطرح می‌شود. در ضمن می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ که در آن b ، $c\in R$ و $a\in R-\{0\}$ را یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم و اگر این معادله دارای دو ریشهٔ متمایز حقیقی x_1 و x_2 باشد، آن‌گاه مقادیر این دو ریشه با استفاده از رابطهٔ Δ عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases} \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} & (1) \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} & (2)\end{cases}$$

اشاره ۱: چنانچه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن b ، $c\in R$ و $a\in R-\{0\}$، داشته باشیم:

الف) $\Delta>0$، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دو ریشهٔ متمایز حقیقی x_1 و x_2 دارد.

ب) $\Delta=0$، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_1=x_2$ است.

پ) $\Delta<0$، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

همان‌گونه که در بالا اشاره کردیم، از رابطهٔ (۱) و (۲) به‌عنوان روشی کلی برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) استفاده می‌شود که می‌توانیم آن را ***«روش دلتای کلاسیک»***[۱] بنامیم. علت نام‌گذاری روش مزبور به روش دلتای کلاسیک این است که در مقاله‌ای با عنوان **«روش دلتای تجدیدنظر شده»**[۲]، دو رابطهٔ جدید براساس $\Delta=b^2-4ac$، برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) ارائه شده است که با روابط (۱) و (۲) متفاوت هستند.

هدف اصلی در این مقاله تعیین روشی کلی و نوین برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) است که نه‌تنها از دو روش دلتای کلاسیک و دلتای تجدیدنظر شده متمایز است، بلکه در این روش کلی مدرن، هیچ نیازی به محاسبهٔ مقدار $\Delta=b^2-4ac$ برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم نیست. به بیان بهتر، برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم، با استفاده از این روش، رابطه‌های به‌دست‌آمده به گونه‌ای مُبرا و به دور از Δ هستند و از خود عبارت معادلهٔ درجهٔ دوم استخراج شده‌اند. رویهٔ رسیدن به این منظور را در ادامه بیان می‌کنیم.

تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ را که در آن داریم: b ، $c\in R$ و $a\in R-\{0\}$ در نظر می‌گیریم. طول نقطهٔ **«اکسترما»**[۳]ی این تابع را براساس **«قضیهٔ فرما»**[۴] تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow$$

$$f'(x)=2ax+b \xrightarrow{f'(x)=0} x_E=-\frac{b}{2a} \qquad (3)$$

در نتیجه:

$$x_E=-\frac{b}{2a} \Rightarrow y_E=f(x_E)=f(-\frac{b}{2a})$$

$$=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a} \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}$$

$$y_E=f(x_E)=f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a} \qquad (4)$$

بنابرایـــن، تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن $b , c\in R$ و $a\in R-\{0\}$، دارای این نقطهٔ اکسترماست:

$$E\left|\begin{array}{l} x_E=-\dfrac{b}{2a} \\ y_E=-\dfrac{\Delta}{4a}\end{array}\right.$$

اکنون از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$y_E=f(x_E)=f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}\xrightarrow{\div a\neq 0}\frac{y_E}{a}=\frac{f(x_E)}{a}$$
$$=\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}=-\frac{\Delta}{4a^2}\Rightarrow-\frac{y_E}{a}=-\frac{f(x_E)}{a}=-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}$$
$$=\frac{\Delta}{4a^2}\xRightarrow{\sqrt{}}\sqrt{-\frac{y_E}{a}}=\sqrt{-\frac{f(x_E)}{a}}=\sqrt{-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ \text{یا} \\ \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}} \\ \text{یا} \\ \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ \text{یا} \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}} \\ \text{یا} \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ \text{یا} \\ \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}} \\ \text{یا} \\ \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} & (5) \\ \text{یا} & \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}} & (6) \\ \text{یا} & \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}} & (7)\end{array}\right.$$

از جایگذاری هریک از رابطه‌های (۵)، (۶) و (۷) در رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$x_1=\frac{-b}{2a}+\sqrt{-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}=x_E+\sqrt{-\frac{f(x_E)}{a}}=x_E+\sqrt{-\frac{y_E}{a}}\quad(8)$$

$$x_2=\frac{-b}{2a}-\sqrt{-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}=x_E-\sqrt{-\frac{f(x_E)}{a}}=x_E-\sqrt{-\frac{y_E}{a}}\quad(9)$$

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که با استفاده از دو رابطهٔ (۸) و (۹) به یک روش کلی جدید برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) دســت یافته‌ایم که در آن هیچ نیازی به محاسبهٔ مقدار دلتا $(\Delta=b^2-4ac)$ نیست. تنها با استفاده از خود عبارت معادلهٔ درجهٔ دوم و محاســبهٔ نقطهٔ اکسترما $E\left|\begin{array}{l} x_E=-\frac{b}{2a} \\ y_E=-\frac{\Delta}{4a}\end{array}\right.$، می‌توان این معادله را حل کرد.

اشاره ۲: چنانچــه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $c\in R$ و b و $a\in R-\{0\}$، داشته باشیم:

الف) $-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}>0$ $=-\dfrac{f(x_E)}{a}=-\dfrac{y_E}{a}$، آن‌گـــاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دو ریشهٔ متمایز حقیقی x_1 و x_2 دارد.

ب) $-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}=0$ $=-\dfrac{f(x_E)}{a}=-\dfrac{y_E}{a}$، آن‌گاه معادلــهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_1=x_2$ است.

پ) $-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}<0$ $=-\dfrac{f(x_E)}{a}=-\dfrac{y_E}{a}$، آن‌گاه معادلــهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

مثال ۱. ریشــهٔ (ریشــه‌های) معادلهٔ درجــهٔ دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

$2x^2+4x-30=0$

حل: برای حل این معادله با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما، تابع درجهٔ دوم $f(x)=2x^2+4x-30$ را در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$y=f(x)=2x^2+4x-30$$
$$\Rightarrow y'=f'(x)=4x+4\xrightarrow{y'=f'(x)=0}x_E=-1$$
$$x_E=-1\Rightarrow f(-1)=2(-1)^2+4(-1)-30\Rightarrow y_E=-32$$

بنابرایـــن تابـــع درجـــهٔ دوم $y=f(x)=2x^2+4x-30$ دارای نقطهٔ اکســترمای $E\left|\begin{array}{l} x_E=-1 \\ y_E=-32\end{array}\right.$ است. اکنون با استفاده از دو رابطهٔ

(۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{-\dfrac{-32}{2}} \\ x_2 = -1 - \sqrt{-\dfrac{-32}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 4 \\ x_2 = -1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

مثال ۲. تابع درجهٔ دوم $y=f(x)=ax^2-12x-36$ دارای این نقطهٔ اکسترماست:

$$E\left|\begin{matrix} 2 \\ -48 \end{matrix}\right.$$

صفرهای تابع را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

حل:

$$y = f(x) = ax^2 - 12x - 36 \Rightarrow y' = f'(x)$$

$$= 2ax - 12 \xrightarrow{y'=f'(x)=0\ ,\ x_E=2} 2a(2) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = 3$$

اکنون باید معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-12x-36=0$ را با استفاده از روش اکسترما حل کنیم. با بهره‌گیری از دو رابطهٔ (۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{-\dfrac{-48}{3}} \\ x_2 = 2 - \sqrt{-\dfrac{-48}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 4 \\ x_2 = 2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

مثال ۳. ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

$4x^2+32x+64=0$

حل: برای حل این معادله با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما، تابع درجهٔ دوم $f(x)=4x^2+32x+64$ را در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$y = f(x) = 4x^2 + 32x + 64 \Rightarrow y' = f'(x)$$

$$= 8x + 32 \xrightarrow{y'=f'(x)=0} x_E = -4$$

$$x_E = -4 \Rightarrow f(-4) = 4(-4)^2 + 32(-4) + 64 \Rightarrow$$

$$y_E = 0$$

بنابراین تابع درجهٔ دوم $y = f(x) = 4x^2 + 32x + 64$ دارای نقطهٔ اکسترمای $E\left|\begin{matrix} x_E = -4 \\ y_E = 0 \end{matrix}\right.$ است. با استفاده از دو رابطهٔ (۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + \sqrt{-\dfrac{0}{4}} \\ x_2 = -4 - \sqrt{-\dfrac{0}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + 0 \\ x_2 = -4 - 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = -4$$

مثال ۴. تابع درجهٔ دوم $y=f(x)=5x^2+10x+c$ دارای نقطهٔ اکسترمای $E\left|\begin{matrix} -1 \\ -80 \end{matrix}\right.$ است.

الف) مقدار c را به دست آورید.

ب) صفرهای این تابع را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

حل:

الف) از آنجا که تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن داریم: $b, c\in R$ و $a\in R-\{0\}$، دارای نقطهٔ اکسترمای

$$E\left|\begin{matrix} x_E = -\dfrac{b}{2a} \\ y_E = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{matrix}\right.$$

است، بنابراین داریم:

$$x_E = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$y_E = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -80 \Rightarrow \frac{\Delta}{4a} = 80 \Rightarrow \Delta = 320a$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} b^2 - 4ac = 320a \xrightarrow{b=2a} (2a)^2 - 4ac$$

$$= 320a \Rightarrow a - c = 80 \xrightarrow{a=5} 5 - c = 80 \Rightarrow c = -75$$

ب) اکنون باید معادلهٔ درجهٔ دوم $5x^2+10x-75=0$ را با استفاده از روش اکسترما حل کنیم. با بهره‌گیری از دو رابطهٔ (۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{-\dfrac{-80}{5}} \\ x_2 = -1 - \sqrt{-\dfrac{-80}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 4 \\ x_2 = -1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

تمرین

ریشهٔ (ریشه‌های) هریک از معادله‌های درجهٔ دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

الف) $-۴x^{۲}+۳۲x-۴۸=۰$

ب) $۹x^{۲}+۵۴x+۸۱=۰$

پ) $۵x^{۲}+۸x+۱۹=۰$

ت) $۶x^{۲}+۱۲x-۴۸=۰$

ث) $-۴x^{۲}+۴۰x-۱۰۰=۰$

ج) $-۷x^{۲}+۱۰x-۳۳=۰$

چ) $۲x^{۲}+۴x-۳۰=۰$

ح) $۳۶x^{۲}+۲۸۸x+۵۷۶=۰$

* پی‌نوشت‌ها

1. Classic Quadratic Formula Method
2. Revised Quadratic Formula Method

علاقه‌مندان به مطالعهٔ مقالهٔ **روش دلتای تجدیدنظر شده** می‌توانند به منبع شماره ۴ مراجعه کنند.

3. Extrema

به‌صورت کلی به نقطهٔ ماکزیمم یا نقطهٔ مینیمم تابع، نقطهٔ **اکسترما** می‌گویند. هنگامی که صحبت از نقطه‌های ماکزیمم یا نقطه‌های مینیمم تابع به میان می‌آید، از واژهٔ نقطه‌های **اکسترمم** (Extremum) استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، واژهٔ اکسترمم در زبان انگلیسی به‌عنوان جمع برای واژهٔ اکسترما به‌کار می‌رود.

4. Fremat's Theorem

قضیهٔ فرما: اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ به طول $x_۰$، اکسترمای (ماکزیمم یا مینیمم) نسبی داشته باشد و $f'(x_۰)$ موجود باشد، آن‌گاه داریم: $f'(x_۰)=۰$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمای نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

* منابع

۱. کتاب درسی. ریاضی ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۲. کتاب درسی. ریاضی ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۳. کتاب درسی. ریاضی ۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۴. یارمحمدی، احسان (۱۳۹۹). «روش ابتکاری حل معادلهٔ درجهٔ دوم: روش دلتای تجدیدنظر شده». ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی ریاضیات یکان‌نو. دورهٔ سیزدهم (شمارهٔ ۸۵). شیراز.

ادب ریاضی

وقتی سر کلاس به درس معلم گوش می‌دهید، مسئله‌ای را حل می‌کنید، یا یک کتاب ریاضی را می‌خوانید، به واژه‌هایی که معنای ریاضی دارند، توجه کنید و همهٔ آن‌ها را روی ورق کاغذی بنویسید: «ضریب»، «جمله»، «معادله»، «دایره»، «چندضلعی منتظم»، «مخروط ناقص»، «کسر»، «نابرابری» و ... .

بعد، در منزل، سعی کنید دربارهٔ معنای ریاضی آن‌ها بیندیشید. به کتاب مراجعه کنید، از دوستان و یا دبیران خود بپرسید، و جست‌وجو کنید تا معنا و تعریف درست هر واژه را بیابید.

***

می‌توان برای «اثبات» تعلیم‌پذیری انسان و تأثیر آموزش «دلیل» آورد که:

دوستی با مردم دانا، چو زرین‌کاسه است — نشکند، گر بشکند، باید ز نو پرداختن

یا:

دوستی با مردم نادان، سفالین‌کاسه است — بشکند، گر نشکند، باید به دور انداختن

این شیوه را ادیبان ما نوعی تمثیل می‌خوانند و تمثیل یعنی مثال آوردن و درست نیست که با این روش ریاضیات را استدلال کنیم. مثال در ریاضیات فقط برای روشن‌تر کردن موضوع آورده می‌شود، نه برای اثبات آن. علاوه بر این‌ها، شکل یا مثال، اگر هم درست انتخاب شده باشد، ممکن است حالت خاصی از مسئله یا قضیه باشد و نتواند حالت‌های دیگر را توضیح بدهد.

پرویز شهریاری